

- Réponse exercice thermodynamique n° 1 de l'épreuve de rattrapage, ENTP, Alger 1999 :

1° La variation élémentaire de l'énergie interne est, d'après le premier principe

$$dU = \delta Q + \delta W .$$

Pour une transformation élémentaire réversible, le travail des forces de pression $\delta W_{rev} = -PdV$. La relation (1) fournit la quantité de chaleur échangée au cours transformation : $\delta Q_{rev} = dU + PdV$.

Puisque le gaz est parfait, $dU = C_v dT$ et la relation précédente devient :

$$\delta Q_{rev} = C_v dT + PdV.$$

En tenant compte de l'équation d'état des gaz parfaits, on a :

$$PV = RT \Rightarrow PdV = RdT - VdP,$$

ce qui permet d'écrire le transfert thermique réversible en fonction de dT et de dP se

$$\delta Q_{rev} = (C_v + R)dT - VdP.$$

Dans le cas d'une transformation isobare, on a :

$$dP = 0 \Rightarrow \delta Q_{rev} = (C_v + R)dT = C_p dT,$$

d'où

$$C_p - C_v = R.$$

2° Dans le cas d'une transformation adiabatique réversible, $\delta Q_{rev} = 0$ et la relation (2) permet d'écrire :

$$C_v dT = -PdV.$$

La relation de Mayer : $C_p - C_v = R$ et $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$, permet d'en déduire immédiatement

$$C_v = \frac{R}{\gamma - 1}$$

En remplaçant l'expression de C_v et $P = \frac{RT}{V}$ dans (3), on obtient :

$$\frac{R}{\gamma - 1} dT = -\frac{RT}{V} dV,$$

ou encore

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0.$$

Cette relation acquiert la forme intégrale suivante :

$$TV^{\gamma-1} = Cste.$$

Remarques :

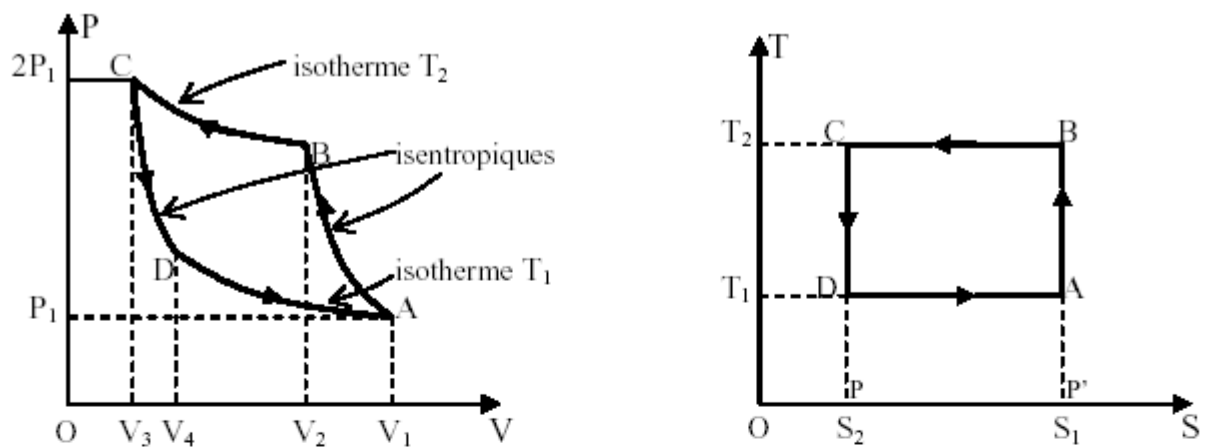
Il faut noter que cette relation suppose :

- que la transformation est réversible afin que T et V soient définies à chaque instant et que T soit uniforme ;
- que le gaz est parfait ;
- qu'il subit une transformation adiabatique ;
- que γ (donc C_v et C_p) est constant. Cette dernière hypothèse est valable à condition que l'intervalle de température "balayé" par le gaz ne soit pas trop important (de l'ordre de quelques dizaines de degrés Celsius).

[Retour à l'énoncé](#) - [Retour à la palette de sujet](#)

- Réponse exercice thermodynamique n° 2 de l'épreuve de rattrapage, ENTP, Alger 1999 :

1° Il s'agit d'un cycle de Carnot



Dans un diagramme (P, V) , le cycle est constitué de deux morceaux de courbes AB et CD (l'équation des adiabatiques $PV^\gamma = \text{Cste}$) et de deux morceaux d'hyperboles BC et DA (l'équation des isothermes $PV = \text{Cste}$).

T_1 est la température de la source froide, T_2 celle de la source chaude. On passe d'une source à l'autre en remarquant :

- * qu'une transformation adiabatique réversible donc isentropique se traduit par une variation d'entropie nulle : $\Delta S_{AB} = \Delta S_{CD} = 0$; chacune des transformations AB et CD est représentée dans un diagramme entropique (T, S) par un segment vertical.

- * que la compression (resp détente) isotherme s'accompagne d'un travail positif (resp négatif $W_{DA} < 0$), donc une perte de chaleur $Q_{BC} < 0$ (resp un gain de chaleur $Q_{DA} > 0$)

et d'une diminution d'entropie $\Delta S_{BC} = S_C - S_B = \int_B^C \frac{\delta Q}{T_2} = \frac{Q_{BC}}{T_2} < 0$ (resp un accroissement d'entropie $\Delta S_{DA} = \frac{Q_{DA}}{T_1} > 0$).

De telles transformations sont représentées chacune dans un diagramme entropique (T, S) par un segment horizontal.

2° Transformation AB :

A l'état initial, le volume V_1 du gaz est donné par la loi des gaz parfaits :

$$P_1 V_1 = RT_1 \Rightarrow V_1 = \frac{RT_1}{P_1}.$$

Application numérique :

$$V_1 = \frac{8,32 \times 285}{10^5} = 23,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

On comprime le gaz, de façon adiabatique, de l'état $A(P_1, V_1, T_1)$ à l'état $B(P_2, V_2)$ relation de Laplace $TV^{\gamma-1} = \text{Cste}$ (établie dans l'exercice 1) permet de calculer le volu

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1} \Rightarrow V_2 = V_1 \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^{1/\gamma-1}.$$

Application numérique :

le gaz étant diatomique, on a $\gamma = \frac{7}{5}$. Donc

$$V_2 = 23,7 \cdot 10^{-3} \times \left(\frac{285}{320} \right)^{5/2} = 17,7 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

L'équation d'état du gaz parfait fournit la pression P_2 dans l'état B :

$$P_2 V_2 = RT_2 \Rightarrow P_2 = \frac{RT_2}{V_2}.$$

Application numérique :

$$P_2 = \frac{8,32 \times 320}{17,7 \cdot 10^{-3}} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

La variation d'énergie interne est :

$$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = W_{AB} + Q_{AB} = W_{AB} \quad \text{car } Q_{AB} = 0.$$

On a, pour une mole de gaz parfait,

$$\Delta U_{AB} = W_{AB} = C_v (T_2 - T_1) ;$$

or, la capacité calorifique molaire isochore est $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$, donc

$$W_{AB} = \frac{R}{\gamma-1} (T_2 - T_1).$$

Application numérique :

$$W_{AB} = \frac{8,32}{2} (320 - 285) = 728 \text{ J}$$

Transformation BC :

Le gaz subit une compression isotherme réversible de l'état B(P_2, V_2, T_2) C($2P_1, V_3, T_2$). Le volume V_3 est obtenu à l'aide de la loi de Mariotte :

$$P_2 V_2 = 2P_1 V_3 \Rightarrow V_3 = V_2 \frac{P_2}{2P_1}.$$

Application numérique :

$$V_3 = 17,7 \cdot 10^{-3} \frac{1,5 \cdot 10^5}{2 \cdot 10^5} \approx 13,3 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Le travail élémentaire reçu par le gaz au cours de cette transformation réversi

$$\delta W = -PdV = -\frac{RT_2}{V}dV.$$

Par intégration, on obtient :

$$W_{BC} = -RT_2 \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V} = RT_2 \ln \frac{V_2}{V_3}.$$

Application numérique :

$$W_{BC} = 8,32 \times 320 \ln \frac{17,7}{13,3} \approx 761 \text{ J}.$$

Transformation CD :

Pour cette transformation isentropique, le volume V_4 dans l'état D(P_4, V_4, T_1) est

$$T_2 V_3^{\gamma-1} = T_1 V_4^{\gamma-1} \Rightarrow V_4 = V_3 \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^{1/\gamma-1}.$$

Application numérique :

$$V_4 = 13,3 \cdot 10^{-3} \left(\frac{320}{285} \right)^{5/2} \approx 17,8 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3.$$

Comme pour l'isentropique AB, le travail échangé avec le milieu extérieur

$$W_{CD} = \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_2).$$

Application numérique :

$$W_{CD} = -W_{AB} = -728 \text{ J}.$$

Transformation DA :

Une démonstration analogue à celle utilisée lors de la transformation BC permet d'c travail échangé :

$$W_{DA} = RT_1 \ln \frac{V_4}{V_1}.$$

Application numérique :

$$W_{DA} = 8,32 \times 285 \ln \frac{17,8 \cdot 10^{-3}}{23,7 \cdot 10^{-3}} \approx -679 \text{ J.}$$

3° - Au cours des évolutions isentropiques AB et CD, les quantités de chaleur échangées avec le milieu extérieur sont nulles : $Q_{AB} = Q_{CD} = 0$.

- Sur les deux isothermes BC et DA, la variation d'énergie interne du gaz est nulle

$$Q_{BC} = -W_{BC} = RT_2 \ln \frac{V_2}{V_3} \quad \text{et} \quad Q_{DA} = -W_{DA} = RT_1 \ln \frac{V_4}{V_1}.$$

Application numérique :

$$Q_{BC} = -761 \text{ J} \quad \text{et} \quad Q_{DA} = 679 \text{ J.}$$

Au cours du cycle ABCDA, la variation d'énergie interne du gaz s'écrit :

$$\Delta U = (W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA}) + (Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}),$$

$$\Rightarrow \Delta U = W_{AB} + W_{CD} + (W_{BC} + Q_{BC}) + (W_{DA} + Q_{DA}) \quad (\text{car } Q_{AB} = Q_{CD} = 0)$$

$$\Rightarrow \Delta U = W_{AB} + W_{CD} \quad (\text{car } W_{BC} = -Q_{BC} \text{ et } W_{DA} = -Q_{DA})$$

soit

$$\Delta U = \frac{R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) + \frac{R}{\gamma - 1} (T_1 - T_2) = 0.$$

Donc, le premier principe est vérifié car l'énergie interne ne varie pas au cours d'un cycle.

La variation d'entropie de l'univers s'écrit :

$$\Delta S_{\text{univers}} = \Delta S_{\text{gaz}} + \Delta S_{\text{sources}}.$$

Or, la variation d'entropie du gaz au cours du cycle ABCDA est :

$$\Delta S_{\text{gaz}} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CD} + \Delta S_{DA};$$

- au cours des isentropiques AB et CD : $\Delta S_{AB} = \Delta S_{CD} = 0$;

- au cours de l'isotherme BC : $\Delta S_{BC} = \frac{Q_{BC}}{T_2} = \frac{RT_2 \ln \frac{V_2}{V_3}}{T_2} = R \ln \frac{V_2}{V_3}$;

- au cours de l'isotherme DA : $\Delta S_{DA} = \frac{Q_{DA}}{T_1} = \frac{RT_1 \ln \frac{V_4}{V_1}}{T_1} = R \ln \frac{V_4}{V_1}$;

donc

$$\Delta S_{gaz} = R \ln \frac{V_2}{V_3} + R \ln \frac{V_4}{V_1}.$$

En tenant compte des équations (1) et (2), on en déduit immédiatement que

$$\frac{V_2}{V_3} = \frac{V_1}{V_4},$$

d'où

$$\Delta S_{gaz} = R \ln \frac{V_2}{V_3} - R \ln \frac{V_1}{V_4} = 0,$$

ce résultat était prévisible car l'entropie du gaz ne change pas au cours d'un cycle réversible.

La variation d'entropie totale des sources est :

$$\Delta S_{sources} = \Delta S_C + \Delta S_F ;$$

- au cours de la phase isotherme BC, la source chaude de température T_2 reçoit de la pompe

une quantité de chaleur $Q_C = -Q_{BC}$: $\Delta S_C = \frac{Q_C}{T_2} = \frac{-Q_{BC}}{T_2} = -R \ln \frac{V_2}{V_3}$;

- au cours de la phase isotherme DA, la source froide de température T_1 fournit au

cycle une quantité de chaleur $Q_F = -Q_{DA}$: $\Delta S_F = \frac{Q_F}{T_1} = \frac{-Q_{DA}}{T_1} = -R \ln \frac{V_4}{V_1}$;

on en déduit, compte tenu de l'équation (3)

$$\Delta S_{sources} = -R \ln \frac{V_2}{V_3} - R \ln \frac{V_4}{V_1} = 0,$$

donc

$$\Delta S_{univers} = \Delta S_{gaz} + \Delta S_{sources} = 0.$$

Le deuxième principe est alors vérifié car la variation d'entropie de l'univers est nulle au cours d'un cycle réversible.

4° Dans le diagramme (P, V), l'aire du cycle correspond au travail total échangé par le cycle : $A_{cycle} = W = - \oint_{cycle} P dV$. Ce travail est positif car le cycle parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre.

Il s'agit donc d'un cycle **récepteur** ; on prend le cas d'une pompe à chaleur qui reçoit du travail ($W > 0$) et de la chaleur d'une source froide ($Q_{DA} > 0$) et restitue de la chaleur ($Q_{BC} < 0$) à la source chaude. Le coefficient de performance défini par :

$$e = \frac{\text{gain}}{\text{dépense}} = \frac{|\text{chaleur fournie à la source chaude}|}{\text{travail reçu par la pompe à chaleur}} = \frac{|Q_{BC}|}{W} ;$$

on donnera deux méthode permettant de calculer ce rapport .

Première méthode

D'après le premier principe, le travail reçu par le gaz au cours d'un cycle est :

$$W = -Q_{BC} - Q_{DA},$$

on en déduit

$$e = \frac{Q_{BC}}{Q_{BC} + Q_{DA}} = \frac{1}{1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}}.$$

En remplaçant les expressions des quantités de chaleur Q_{BC} et Q_{DA} , calculées en l'équation (4), on obtient :

$$e = \frac{1}{1 + \left(RT_1 \ln \frac{V_4}{V_1} / RT_2 \ln \frac{V_2}{V_3} \right)}$$

ou encore, compte tenu de l'équation (3)

$$e = \frac{1}{1 - \left(RT_1 \ln \frac{V_1}{V_4} / RT_2 \ln \frac{V_2}{V_3} \right)} = \frac{T_2}{T_2 - T_1}$$

Application numérique :

$$e = \frac{320}{320 - 285} = 9,14.$$

Deuxième méthode

Dans le diagramme (T, S), l'aire du cycle est associé à la chaleur totale échangé au cycle. $A'_{cycle} = Q = \oint_{cycle} TdS$. Cette quantité de chaleur est négative car le cycle est parcouru

le sens trigonométrique.

On a :

$$e = \frac{|Q_{BC}|}{W},$$

or, puisque $W = -Q$ (ou bien $A_{cycle} = -A'_{cycle}$), il vient :

$$e = \frac{|Q_{BC}|}{|Q|} = \frac{\text{Aire du rectangle PP'BC}}{\text{Aire du rectangle DABC}} = \frac{(S_1 - S_2)T_2}{(S_1 - S_2)(T_2 - T_1)}$$

soit

$$e = \frac{T_2}{T_2 - T_1} = 9,14.$$

Remarque :

Nous aurions pu aussi utiliser directement la relation de Laplace relative à γ
 $(T^\gamma P^{1-\gamma} = Cste)$ pour calculer la pression P_2 .